BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2006

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ ОДНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО УПРАВЛЕНИЮ

Ч.А.АГАЕВА

Бакинский Государственный Университет

В работе рассматривается управляемая стохастическая система с ограничением на правый конец траектории и с постоянным запаздыванием по управлению. Для этой задачи найдено необходимое условие оптимальности, когда коэффициент диффузии зависит от управления.

Стохастические дифференциальные уравнения с запаздыванием находят много приложений в теории автоматического управления, в теории автоколебательных систем и т.д., где реальные системы, в той или иной степени, подвергаются воздействию случайных помех. Поэтому задачи оптимального управления для систем, описываемых такими уравнениями, являются актуальными в настоящее время. Ранее в работах [1], [2] были рассмотрены задачи стохастического оптимального управления с запаздыванием по состоянию, а в работе [3] рассмотрена задача стохастического оптимального управления с запаздыванием по управлению, когда коэффициент диффузии не зависит от управления.

Данная работа посвящена задаче стохастического оптимального управления с постоянным запаздыванием по управлению и управляемым коэффициентом диффузии при ограничении на правый конец траектории.

Пусть (Ω, F, P)- полное вероятностное пространство с определенным на нем неубывающим потоком $\sigma-$ алгебр F^t, где $F^t = \sigma(w_s, t_0 \le s \le t)$, $t_0 \ge 0$, а $w_t -$ n-мерный стандартный винеровский процесс.

$L_F^2(t_0, t_1; R^n)$ - пространство измеримых по (t, ω) и F^t- согласованных процессов $x: [t_0, t_1] \times \Omega \to R^n$, таких, что $E\int_{t_0}^{t_1} |x_t(\omega)|^2 dt < +\infty$, где $|\cdot|$- норма в пространстве R^n, $E-$ знак математического ожидания, $L_F^2 C(t_0, t_1; R^n)$ - пространство случайных процессов $x_t(\omega) \in L_F^2(t_0, t_1; R^n)$ с почти наверное (п.н.) непрерывными траекториями, которое означает, что $x_t(\omega)$ с вероятностью 1 является непрерывной функцией аргумента t.

Рассмотрим следующую управляемую стохастическую систему с запаздыванием:

$$dx_t = g(x_t, u_t, u_{t-h}, t)dt + f(x_t, u_t, u_{t-h}, t)dw_t, \quad t \in (t_0, t_1], \tag{1}$$

$$x_{t_0}(\omega) = x_0, \tag{2}$$

$$u_t(\omega) = S(t), \qquad t \in [t_0 - h, t_0), \quad h > 0, \tag{3}$$

$$u_t \in U_g \equiv \{u_t(\omega) \in L_F^2(t_0, t_1; R^m) / u_\bullet(\omega) \in U \subset R^m, п.н.\}. \tag{4}$$

где $U -$ непустое ограниченное множество, $S(t) -$ непрерывная начальная функция.

Требуется минимизировать функционал

$$J(u) = E\left\{p(x_{t_1}) + \int_{t_0}^{t_1} l(x_t, u_t, t)dt\right\} \tag{5}$$

при условии

$$Eq(x_t) \in G, \tag{6}$$

$G -$ замкнутое выпуклое множество в R^k.

Предполагается выполнение следующих условий:

I. Функции $l(x,u,t)$, $g(x,u,v,t)$, $f(x,u,v,t)$ и их производные первого и второго порядков по x ограничены и непрерывны по совокупности аргументов:

$$g: R^n \times R^m \times R^m \times [t_0, t_1] \to R^n,$$

$$l: R^n \times R^m \times [t_0, t_1] \to R,$$

$$f: R^n \times R^m \times R^m \times [t_0, t_1] \to R^{n \times n}.$$

II. При фиксированных (t,u) функции l, g, f дважды непрерывно-дифференцируемы по x и удовлетворяют условию линейного роста:

$$(1+|x|)^{-1}\left(|g(x,u,v,t)| + |g_x(x,u,v,t)| + |l(x,u,t)| + |l_x(x,u,t)| + \right.$$
$$\left. + |f(x,u,v,t)| + |f_x(x,u,v,t)|\right) \le N.$$

III. Функция $p: R^n \to R$ дважды непрерывно - дифференцируема и:

$$|p(x)| + |p_x(x)| \le N(1+|x|),$$

$$|p_{xx}(x)| \le N.$$

IV. Функция $q: R^n \to R^k$ дважды непрерывно -дифференцируема и:

$$|q(x)| + |q_x(x)| \le N(1+|x|),$$

$$\left|q_{xx}(x)\right| \leq N .$$

Следующая теорема дает необходимое условие оптимальности для стохастической задачи управления $(1)-(6)$.

Теорема. Пусть выполняются условия I-IV и $\left(x_t^0, u_t^0\right)-$решение задачи (1)-(6). Тогда существуют случайные процессы $(\varphi_t, \gamma_t) \in L_F^2 C(t_0, t_1; R^n) \times L_F^2(t_0, t_1; R^{nxn})$ и $(\Psi_t, Z_t) \in L_F^2 C(t_0, t_1; R^n) \times L_F^2(t_0, t_1; R^{nxn})$ и ненулевое $\left(\lambda_0, \lambda_1\right) \in R^{k+1}$, такие, что:

a) $\lambda_0 \geq 0$, λ_1-нормаль к множеству G в точке $Eq\left(x_{t_1}^0\right), \lambda_0^2+\left|\lambda_1\right|^2=1$;

b) $$\begin{cases} d\varphi_t=-\left[g_x^*\left(x_t^0, u_t^0, v_t^0, t\right)\varphi_t+f_x^*\left(x_t^0, u_t^0, v_t^0, t\right)\beta_t-\lambda_0 l\left(x_t^0, u_t^0, t\right)\right]+\gamma_t dw_t, t \in [t_0, t_1), \\ \varphi_{t_1}=-\lambda_0 p_x\left(x_{t_1}\right)-\lambda_1 q_x\left(x_{t_1}\right); \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} d\Psi_t=-[g_x^*(x_t^0, u_t^0, v_t^0, t)\Psi_t+\Psi_t g_x(x_t^0, u_t^0, v_t^0, t)+ \\ +f_x^*(x_t^0, u_t^0, v_t^0, t)\Psi_t f_x(x_t^0, u_t^0, v_t^0, t)dt+f_x^*(x_t^0, u_t^0, v_t^0, t)Z_t+Z_t f_x(x_t^0, u_t^0, v_t^0, t)+ \\ +Q_{xx}(\varphi_t, x_t^0, u_t^0, v_t^0, t)]\ dt+Z_t dw_t\ ,\ t_0 \leq t<t_1, \\ \Psi_{t_1}=-\lambda_0 p_{xx}\left(x_{t_1}\right)-\lambda_1 q_{xx}\left(x_{t_1}\right); \end{cases}$$

d) $\forall u \in U$ с вероятностью 1 выполняется:

$$Q(\varphi_\theta, x_\theta^0, u, v_\theta, \theta)-Q(\varphi_\theta, x_\theta^0, u_\theta^0, v_\theta, \theta)+$$
$$+\left[Q(\varphi_{\theta+h}, x_{\theta+h}^0, u_{\theta+h}^0, u, \theta+h)-Q(\varphi_{\theta+h}, x_{\theta+h}^0, u_{\theta+h}^0, v_{\theta+h}^0, \theta+h)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\Delta_u f^*(x_\theta^0, u_\theta^0, v_\theta^0, \theta)\Psi_t\Delta_u f(x_\theta^0, u_\theta^0, v_\theta^0, \theta)+\frac{1}{2}\Delta_u f^*(x_{\theta+h}^0, u_{\theta+h}^0, v_{\theta+h}^0, \theta+h)\times$$
$$\times\Psi_{t+h}\,\Delta_u f(x_{\theta+h}^0, u_{\theta+h}^0, v_{\theta+h}^0, \theta+h) \leq 0\ ,\ \textit{почти для всех}\ \theta \in [t_0, t_1-h),$$
$$Q(\varphi_\theta, x_\theta^0, u, v_\theta, \theta)-Q(\varphi_\theta, x_\theta^0, u_\theta^0, v_\theta, \theta)+$$
$$+\frac{1}{2}\Delta_u f^*(x_\theta^0, u_\theta^0, v_\theta^0, \theta)\Psi_t\Delta_u f(x_\theta^0, u_\theta^0, v_\theta^0, \theta) \leq 0\ ,\ \textit{почти для всех}\ \theta \in [t_1-h, t_1],$$

здесь: $v_t=u_{t-h}$,

$$Q\left(\varphi_t, x_t, u_t, v_t, t\right)=\varphi_t^* g\left(x_t, u_t, v_t, t\right)+\gamma_t^* f\left(x_t, u_t, v_t, t\right)-l\left(x_t, u_t, t\right).$$

Выполнение «*почти для всех* $\theta \in [t_0, t_1]$» подразумевается по мере Лебега.

Доказательство. Сначала рассмотрим задачу (1)-(5). Пусть $\overline{u_t}=u_t^0+\Delta u_t$ некоторое допустимое управление, а $\overline{x_t}=x_t^0+\Delta x_t$ - соответствующая ему траектория системы $(1)-(4)$. Тогда ясно, что

$$\begin{cases} d\Delta x_t = \left[g\left(\overline{x_t}, \overline{u_t}, \overline{v_t}, t\right) - g\left(x_t^0, u_t^0, v_t^0, t\right)\right]dt + \left[f\left(\overline{x_t}, \overline{u_t}, \overline{v_t}, t\right) - f\left(x_t^0, u_t^0, v_t^0, t\right)\right]dw_t = \\ = [\Delta_{\overline{u}} g(x_t^0, u_t^0, \overline{v}_t, t) + \Delta_{\overline{v}} g(x_t^0, u_t^0, v_t^0, t) + g_x(x_t^0, \overline{u}_t, \overline{v}_t, t)\Delta x_t + \\ + 0.5\Delta x_t^* g_{xx}(x_t^0, \overline{u}_t, \overline{v}_t, t)\Delta x_t]dt + [\Delta_{\overline{u}} f(x_t^0, u_t^0, \overline{v}_t, t) + \Delta_{\overline{v}} f(x_t^0, u_t^0, v_t^0, t) + \\ + f_x(x_t^0, \overline{u}_t, \overline{v}_t, t)\Delta x_t + 0.5\Delta x_t^* f_{xx}(x_t^0, \overline{u}_t, \overline{v}_t, t)\Delta x_t]dw_t + \eta_t^1 \quad , \quad t \in (t_0, t_1], \\ \Delta x_t = 0, \qquad t \in [t_0 - h, t_0]. \end{cases}$$

где

$$\eta_t^1 = \left\{ \int_0^1 \left[g_x^*(x_t^0 + \mu\Delta x_t, \overline{u}_t, \overline{v}_t, t) - g_x^*(x_t^0, u_t^0, v_t^0, t)\right] \Delta x_t d\mu + \right.$$

$$\left. + 0.5 \cdot \int_0^1 \Delta x_t^* \left[g_{xx}^*(x_t^0 + \mu\Delta x_t, \overline{u}_t, \overline{v}_t, t) - g_{xx}^*(x_t^0, u_t^0, v_t^0, t)\right] \Delta x_t d\mu \right\} dt +$$

$$+ \left\{ \int_0^1 \left[f_x^*(x_t^0 + \mu\Delta x_t, \overline{u}_t, \overline{v}_t, t) - f_x^*(x_t^0, u_t^0, v_t^0, t)\right] \Delta x_t d\mu \right. +$$

$$\left. + 0.5 \cdot \int_0^1 \Delta x_t^* \left[f_{xx}^*(x_t^0 + \mu\Delta x_t, \overline{u}_t, \overline{v}_t, t) - f_{xx}^*(x_t^0, u_t^0, v_t^0, t)\right] \Delta x_t d\mu \right\} dw_t .$$

Пусть:

$$\begin{cases} d\psi_t = -H_x(\psi_t, x_t^0, u_t^0, v_t^0, t)dt + \beta_t dw_t, \ t_0 \le t < t_1, \\ \psi_{t_1} = -p_x(x_{t_1}^0), \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} d\Phi_t = -[g_x^*(x_t^0, u_t^0, v_t^0, t)\Phi_t + \Phi_t g_x(x_t^0, u_t^0, v_t^0, t) + \\ + f_x^*(x_t^0, u_t^0, v_t^0, t)\Phi_t f_x(x_t^0, u_t^0, v_t^0, t)dt + f_x^*(x_t^0, u_t^0, v_t^0, t)\mathrm{K}_t + \mathrm{K}_t f_x(x_t^0, u_t^0, v_t^0, t) + \\ + H_{xx}(\psi_t, x_t^0, u_t^0, v_t^0, t)] \ dt + \mathrm{K}_t dw_t \ , \ t_0 \le t < t_1, \\ \Phi_{t_1} = -p_{xx}(x_{t_1}^0) \end{cases} \tag{8}$$

и

$$\mathrm{H}\left(\psi_t, x_t, u_t, v_t, t\right) = \psi_t^* g\left(x_t, u_t, v_t, t\right) + \beta_t^* f\left(x_t, u_t, v_t, t\right) - l\left(x_t, u_t, t\right).$$

Существование единственного решения, с вероятностью1,стохастических сопряженных уравнений (7),(8) следует из [4].

Согласно формуле Ито [5] имеем:

$$d(\psi_t^* \cdot \Delta x_t) = d\psi_t^* \Delta x_t + \psi_t^* d\Delta x_t + \{ \ \beta_t^*[\Delta_{\overline{u}} f(x_t^0, u_t^0, \overline{v}_t, t) + \Delta_{\overline{v}} f(x_t^0, u_t^0, v_t^0, t) +$$

$$+ f_x(x_t^0, \overline{u}_t, \overline{v}_t, t)\Delta x_t + 0.5\Delta x_t^* f_{xx}(x_t^0, \overline{u}_t, \overline{v}_t, t)\Delta x_{tt}] +$$

$$+\beta_t^*\int_0^1\left[f_x(x_t^0+\mu\ \Delta x_t,\overline{u}_t,\overline{v}_t,t)-f_x(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t)\right]\Delta x_t d\mu+$$

$$+0.5\times\beta_t^*\int_0^1\Delta x_t^*\left[f_{xx}(x_t^0+\mu\ \Delta x_t,\overline{u}_t,\overline{v}_t,t)-f_{xx}(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t)\right]\Delta x_t d\mu\ \}dt \quad (9)$$

и

$$d(\Delta x_t^*\cdot\Phi_t\cdot\Delta x_t)=\Delta x_t^*\cdot d\Phi_t\cdot\Delta x_t+\Delta x_t^*\cdot\Phi_t d\Delta x_t+d\Delta x_t^*\cdot\Phi_t\cdot\Delta x_t+$$
$$+\{\ K_t^*[\Delta_{\overline{u}}f(x_t^0,u_t^0,\overline{v}_t,t)+\Delta_{\overline{v}}f(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t)+f_x(x_t^0,\overline{u}_t,\overline{v}_t,t)\Delta x_t+$$
$$+0.5\Delta x_t^*f_{xx}(x_t^0,\overline{u}_t,\overline{v}_t,t)\Delta x_t]+[\Delta_{\overline{u}}f(x_t^0,u_t^0,\overline{v}_t,t)+\Delta_{\overline{v}}f(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t)+$$
$$+f_x(x_t^0,\overline{u}_t,\overline{v}_t,t)\Delta x_t+0.5\Delta x_t^*f_{xx}(x_t^0,\overline{u}_t,\overline{v}_t,t)\Delta x_t]\cdot\Phi_t\cdot[\Delta_{\overline{u}}f(x_t^0,u_t^0,\overline{v}_t,t)+$$
$$+\Delta_{\overline{v}}f(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t)+f_x(x_t^0,\overline{u}_t,\overline{v}_t,t)\Delta x_t+0.5\Delta x_t^*f_{xx}(x_t^0,\overline{u}_t,\overline{v}_t,t)\Delta x_t]\}dt\ . \quad (10)$$

Для приращения функционала (5) вдоль допустимого управления, с учетом (7)-(10), получаем:

$$\Delta J(u^0)=E\left\{p\left(\overline{x_{t_1}}\right)-p\left(x_{t_1}^0\right)+\int_{t_0}^{t_1}\left[l\left(\overline{x_t},\overline{u_t},t\right)-l\left(x_t^0,u_t^0,t\right)\right]dt\right\}=$$

$$=-E\int_{t_0}^{t_1}\left[\psi_t^*\Delta_{\overline{u}}g\left(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t\right)+\psi_t^*\Delta_{\overline{v}}g\left(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t\right)+\beta_t^*\Delta_{\overline{u}}f\left(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t\right)+\right.$$
$$+\beta_t^*\Delta_{\overline{v}}f\left(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t\right)-\Delta_{\overline{u}}l\left(x_t^0,u_t^0,t\right)+0.5\cdot\Delta_{\overline{u}}f^*(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t)\cdot\Phi_t\times$$
$$\times\Delta_{\overline{u}}f(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t)dt+\Delta_{\overline{u}}f^*\left(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t\right)\Phi_t\Delta_{\overline{v}}f\left(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t\right)+\Delta_{\overline{v}}f^*\left(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t\right)\times$$
$$\left.\times\Phi_t\cdot\Delta_{\overline{u}}f\left(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t\right)+\Delta_{\overline{v}}f^*\left(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t\right)\Phi_t\Delta_{\overline{v}}f\left(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t\right)\ \right]dt-\eta_{t_0}^{t_1},$$

где

$$\eta_{t_0}^{t_1}=E\int_0^1\left[p_x^*\left(x_{t_1}^0+\mu\Delta x_{t_1}\right)-p_x^*\left(x_{t_1}^0\right)\right]\Delta x_{t_1}d\mu+0.5\cdot E\int_0^1\Delta x_{t_1}^*\left[p_{xx}^*\left(x_{t_1}^0+\mu\Delta x_{t_1}\right)-p_{xx}^*\left(x_{t_1}^0\right)\right]\times$$
$$\times\Delta x_{t_1}d\mu+E\int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_0^1\left[l_x^*\left(x_t^0+\mu\Delta x_t,\overline{u_t},t\right)-l_x^*\left(x_t^0,\overline{u_t},t\right)\right]\Delta x_t d\mu\right\}dt+$$
$$+0.5E\int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_0^1\Delta x_t^*\left[l_{xx}^*\left(x_t^0+\mu\Delta x_t,\overline{u_t},t\right)-l_{xx}^*\left(x_t^0,\overline{u_t},t\right)\right]\Delta x_t d\mu\right\}dt+$$

$$+E\int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_0^1\left[\psi_t^*\left(g_x\left(x_t^0+\mu\Delta x_t,\overline{u_t},\overline{v_t},t\right)-g_x\left(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t\right)\right)\right]\Delta x_t d\mu\right\}dt+$$

$$+0.5E\int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_0^1\Delta x_t^*\left[\psi_t^*\left(g_{xx}\left(x_t^0+\mu\Delta x_t,\overline{u_t},\overline{v_t},t\right)-g_{xx}\left(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t\right)\right)\right]\Delta x_t d\mu\right\}dt+$$

$$+E\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1\beta_t^*\left[f_x\left(x_t^\circ+\mu\Delta x_t,\overline{u_t},\overline{v_t},t\right)-f_x\left(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t\right)\right]\Delta x_t d\mu dt+$$

$$+0.5E\int_{t_0}^{t_1}\int_0^1\Delta x_t^*\cdot\beta_t^*\left[f_{xx}\left(x_t^\circ+\mu\Delta x_t,\overline{u_t},\overline{v_t},t\right)-f_{xx}\left(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t\right)\right]\Delta x_t d\mu dt.$$

Рассмотрим игольчатую вариацию:

$$\Delta u_t=\Delta u_{t,\varepsilon}^{\theta}=\begin{cases}0, & t\notin[\theta,\theta+\varepsilon),\ \varepsilon>0,\\ u_t^*-u_t^0, & t\in[\theta,\theta+\varepsilon),\ u_t^*\in L_2\left(\Omega,F^{\theta},\mathrm{P};R^m\right).\end{cases}$$

Пусть $x_{t,\varepsilon}^{\theta}$ - траектория, соответствующая управлению $u_{t,\varepsilon}^{\theta}=u_t^0+\Delta u_{t,\varepsilon}^{\theta}$. Тогда для приращения функционала получаем выражение:

$$\Delta_\theta J\left(u^0\right)=-E\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon}\left[\psi_t^*\Delta_{u_t^*}g\left(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t\right)+\psi_t^*\Delta_{v_t^*}g\left(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t\right)+\right.$$

$$+\beta_t^*\Delta_{u_t^*}f\left(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t\right)+\beta_t^*\Delta_{v_t^*}f\left(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t\right)+0.5\cdot\Delta_{u_t^*}f^*(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t)\cdot\Phi_t\times$$

$$\times\Delta_{u_t^*}f(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t)dt+\Delta_{u_t^*}f^*\left(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t\right)\Phi_t\Delta_{v_t^*}f\left(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t\right)+$$

$$+\Delta_{v_t^*}f^*\left(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t\right)\times\Phi_t\cdot\Delta_{u_t^*}f\left(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t\right)+$$

$$\left.+\Delta_{v_t^*}f^*\left(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t\right)\Phi_t\Delta_{v_t^*}f\left(x_t^0,u_t^0,v_t^0,t\right)-\Delta_{u_t^*}l\left(x_t^0,u_t^0,t\right)\right]dt+\eta_\theta^{\theta+\varepsilon}.$$

Воспользуемся следующей леммой, которую можно доказать по схеме [6]:

Лемма 1. Пусть выполняются условия I-III. Тогда:

$$E\left|x_{t,\varepsilon}^{\theta}-x_t^0\right|^2\le N\varepsilon,\quad \text{если}\qquad \varepsilon\to 0,$$

где $x_{t,\varepsilon}^{\theta}$- траектория системы (1)-(3), соответствующая управлению $u_{t,\varepsilon}^{\theta}=u_t^{\theta}+\Delta u_{t,\varepsilon}^{\theta}$.

Согласно лемме 1 получаем оценку:

$$\eta_\theta^{\theta+\varepsilon}=o(\varepsilon).$$

Тогда для приращения функционала получаем:

$$\Delta_\theta J(u^0)=-E\Big[\psi^*_\theta\Delta_{u^*_\theta} g(x^0_\theta,u^0_\theta,v^0_\theta,\theta)+\psi^*_{\theta+h}\Delta_{v^*_{\theta+h}} g(x^0_{\theta+h},u^0_{\theta+h},v^0_{\theta+h},\theta+h)+$$
$$+\beta^*_\theta\Delta_{u^*_\theta} f(x^0_\theta,u^0_\theta,v^0_\theta,\theta)+\beta^*_{\theta+h}\Delta_{v^*_{\theta+h}} f(x^0_{\theta+h},u^0_{\theta+h},v^0_{\theta+h},\theta+h)+$$
$$+0.5\cdot\Delta_{u^*_\theta} f^*(x^0_\theta,u^0_\theta,v^0_\theta,\theta)\cdot\Phi_\theta\cdot\Delta_{u_\theta} f(x^0_\theta,u^0_\theta,v^0_\theta,\theta)+$$
$$+0.5\cdot\Delta_{v^*_{\theta+h}} f(x^0_{\theta+h},u^0_{\theta+h},v^0_{\theta+h},\theta+h)\cdot\Phi_{\theta+h}\Delta_{v_{\theta+h}} f(x^0_{\theta+h},u^0_{\theta+h},v^0_{\theta+h},\theta+h)-$$
$$-\Delta_{u^*_\theta} l(x^0_\theta,u^0_\theta,\theta)\Big]\geq 0 \quad \text{почти для всех } \theta\in[t_0,t_1-h),$$

$$\Delta_\theta J(u^0)=-E\Big[\psi^*_\theta\Delta_{u^*_\theta} g(x^0_\theta,u^0_\theta,v^0_\theta,\theta)+\beta^*_\theta\Delta_{u^*_\theta} f(x^0_\theta,u^0_\theta,v^0_\theta,\theta)+$$
$$+0.5\cdot\Delta_{u^*_\theta} f^*(x^0_\theta,u^0_\theta,v^0_\theta,\theta)\cdot\Phi_\theta\cdot\Delta_{u_\theta} f(x^0_\theta,u^0_\theta,v^0_\theta,\theta)-\Delta_{u^*_\theta} l(x^0_\theta,u^0_\theta,\theta)\Big]\geq 0$$
$$\text{почти для всех } \theta\in[t_1-h,t_1]. \qquad (11)$$

А теперь рассмотрим задачу (1)-(5), с учетом ограничения (6). При получении необходимого условия оптимальности для стохастической задачи (1)–(6) воспользуемся вариационным принципом Экланда [7].

Введем следующий функционал для любого натурального j:

$$J_j(u)==\min_{(c,y)\in\varepsilon}\sqrt{\left|c-\frac{1}{j}-Ep(x_{t_1})-E\int_{t_0}^{t_1} l(x_t,u_t,t)dt\right|^2-\left|y-Eq(x_{t_1})\right|^2},$$

где $\varepsilon=\{(c,y): c\leq J^0, y\in G\}$, здесь J^0 - минимальное значение функционала в задаче (1)-(6), V – пространство управлений $u_t\in U_g$ с метрикой $d(u,v)=E\,mes\{t_0\leq t\leq t_1; v_t\neq u_t\}$.

Так как функционал $J_j: V\rightarrow R^n$ непрерывен, то, согласно вариационному принципу Экланда, имеем: существует $u^j_t\in V$, такое, что $d(u^j_t,u^0_t)\leq\sqrt{\varepsilon_j}$ и $\forall\, u\in V$ выполняется:

$$J_j(u^j)\leq J_j(u)+\sqrt{\varepsilon_j}\,d(u^j,u),\quad \varepsilon_j=\frac{1}{j}.$$

Это неравенство означает, что (x^j_t,u^j_t) является решением следующей задачи:

$$
\begin{cases}
I_j(u) = J_j(u\quad) + \sqrt{\varepsilon_j}\, E\int\limits_{t_0}^{t_1} \delta\left(u_t, u_t^j\right) \to \min, \\
dx_t = g(x_t, u_t, u_{t-h}, t)dt + f(x_t, u_t, u_{t-h}, t)dw_t, \quad t \in (t_0, t_1], \\
x_{t_0}(\omega) = x_0, \\
u_t(\omega) = S(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0), \\
u_t \in V,
\end{cases}
\tag{12}
$$

здесь: $\delta(u,v) = \begin{cases} 0, & u = v, \\ 1, & u \neq v. \end{cases}$

Так как $\left(x_t^j, u_t^j\right)$ является решением задачи (12), то, согласно (7),(8), получаем существование случайных процессов $\psi_t^j \in L_F^2 C\left(t_0, t_1; R^n\right)$, $\Phi_t^j \in L_F^2 C\left(t_0, t_1; R^n\right)$, $\beta_t^j \in L_F^2\left(t_0, t_1; R^{n\times n}\right)$ и $K_t^j \in L_F^2\left(t_0, t_1; R^{n\times n}\right)$, являющихся решением следующих сопряженных уравнений:

$$
\begin{cases}
d\psi_t^j = -H_x(\psi_t^j, x_t^j, u_t^j, v_t^j, t)dt + \beta_t^j dw_t, \; t_0 \le t < t_1, \\
\psi_{t_1}^j = -\lambda_0^j p_x(x_{t_1}^j) - \lambda_1^j q_x(x_{t_1}^j);
\end{cases}
\tag{13}
$$

$$
\begin{cases}
d\Phi_t^j = -[g_x^*(x_t^j, u_t^j, v_t^j, t)\Phi_t^j + \Phi_t^j g_x(x_t^j, u_t^j, v_t^j, t) + \\
+ f_x^*(x_t^j, u_t^j, v_t^j, t)\Phi_t^j f_x(x_t^j, u_t^j, v_t^j, t)dt + f_x^*(x_t^j, u_t^j, v_t^j, t)K_t + K_t^j f_x(x_t^j, u_t^j, v_t^j, t) + \\
+ H_{xx}(\psi_t^j, x_t^j, u_t^j, v_t^j, t)]\; dt + K_t^j dw_t \;, \; t_0 \le t < t_1, \\
\Phi_{t_1}^j = -\lambda_0^j p_{xx}\left(x_{t_1}^j\right) - \lambda_1^j q_{xx}\left(x_{t_1}^j\right),
\end{cases}
\tag{14}
$$

и ненулевой $\left(\lambda_0^j, \lambda_1^j\right) \in R^{k+1}$, который определяется так:

$$
\left(\lambda_0^j, \lambda_1^j\right) = \left(\frac{-c_j + \dfrac{1}{j} + Ep\left(x_{t_1}^j\right) + E\int\limits_{t_0}^{t_1} l\left(x_t^j, u_t^j, t\right)dt}{J_j^0}, \frac{-y_j + Eq\left(x_{t_1}^j\right)}{J_j^0} \right). \tag{15}
$$

Согласно (11), $\forall\, u^* \in V$ следует:

$$E\Big[\psi_\theta^{j*}\Delta_{u_\theta^*} g\big(x_\theta^j, u_\theta^j, v_\theta^j, \theta\big) + \psi_{\theta+h}^{j*}\Delta_{v_{\theta+h}^*} g\big(x_{\theta+h}^j, u_{\theta+h}^j, v_{\theta+h}^j, \theta+h\big) + +\beta_\theta^{j*}\Delta_{u_\theta^*} f\big(x_\theta^j, u_\theta^j, v_\theta^j, \theta\big) +$$
$$+\beta_{\theta+h}^{j*}\Delta_{v_{\theta+h}^*} f\big(x_{\theta+h}^j, u_{\theta+h}^j, v_{\theta+h}^j, \theta+h\big) + +0.5\cdot\Delta_{u_\theta^*} f^*(x_\theta^j, u_\theta^j, v_\theta^j, \theta)\cdot\Phi_\theta^j\cdot\Delta_{u_\theta} f(x_\theta^j, u_\theta^j, v_\theta^j, \theta) +$$
$$+0.5\cdot\Delta_{v_{\theta+h}^*} f\big(x_{\theta+h}^j, u_{\theta+h}^j, v_{\theta+h}^j, \theta+h\big)\cdot\Phi_{\theta+h}^j\Delta_{v_{\theta+h}} f\big(x_{\theta+h}^j, u_{\theta+h}^j, v_{\theta+h}^j, \theta+h\big) -$$
$$-\Delta_{u_\theta^*} l\big(x_\theta^j, u_\theta^j, \theta\big)\Big] \le 0 \quad \textit{почти для всех } \theta\in[t_0, t_1-h),$$
$$E\Big[\psi_\theta^{j*}\Delta_{u_\theta^*} g\big(x_\theta^j, u_\theta^j, v_\theta^j, \theta\big) + \beta_\theta^{j*}\Delta_{u_\theta^*} f\big(x_\theta^j, u_\theta^j, v_\theta^j, \theta\big) +$$
$$+0.5\cdot\Delta_{u_\theta^*} f^*(x_\theta^j, u_\theta^j, v_\theta^j, \theta)\cdot\Phi_\theta\cdot\Delta_{u_\theta} f(x_\theta^j, u_\theta^j, v_\theta^j, \theta) - \Delta_{u_\theta^*} l\big(x_\theta^j, u_\theta^j, \theta\big)\Big] \le 0$$
$$\textit{почти для всех } \theta\in[t_1-h, t_1]. \tag{16}$$

При предположениях I-IV, по схеме [4], можно доказать следующие факты.

Лемма 2. Предположим, что выполняются условия I-IV и пусть u_t^n - последовательность допустимых управлений из V, а x_t^n - последовательность соответствующих траекторий. Если

$$d(u_t^n, u_t) \to 0 \ \textit{при} \quad n\to\infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{t_0\le t\le t_1} E\left|x_t^n - x_t\right|^2\right\} = 0,$$

где x_t - траектория системы (1)-(4), соответствующая управлению u_t.

Лемма 3. Пусть ψ_t^j - решение системы (13). Тогда

$$E\int_{t_0}^{t_1} |\psi_t^j - \varphi_t|^2\,dt + E\int_{t_0}^{t_1} |\beta_t^j - \gamma_t|^2\,dt \to 0, \text{ если}$$

$d(u_t^j, u_t) \to 0 \quad \textit{при } j\to\infty$.

Лемма 4. Пусть Φ_t^j - решение системы (14). Тогда

$$E\int_{t_0}^{t_1} |\Phi_t^j - \Psi_t|^2\,dt + E\int_{t_0}^{t_1} |\mathrm{K}_t^j - \mathrm{Z}_t|^2\,dt \to 0, \text{ если}$$

$d(u_t^j, u_t) \to 0 \quad \textit{при } j\to\infty$.

Переходя к пределу в (15) при условии $j\to\infty$, получаем, что $\lambda_0^j \to \lambda_0 \ge 0$ и $\lambda_1^j \to \lambda_1$ - нормаль к множеству G в точке $Eq(x_{t_1}^0)$, т.е. пункт **а)** теоремы доказан.

Так как $\psi_{t_1}^j = -\lambda_0^j p_x(x_{t_1}^j) - \lambda_1^j q_x(x_{t_1}^j)$, то при $j\to\infty$ $\psi_{t_1}^j \to -\lambda_0 p_x(x_{t_1}^0) - \lambda_1 q_x(x_{t_1}^0)$, т.е. $\psi_{t_1}^j \to \varphi_{t_1}$ в $L_F^2(t_0, t_1; R^n)$.

С другой стороны, так как $\Phi_{t_1}^j = -\lambda_0^j p_{xx}(x_{t_1}^j) - \lambda_1^j q_{xx}(x_{t_1}^j)$, а при $j \to \infty$ $\lambda_0^j p_{xx}(x_{t_1}^j) + \lambda_1^j q_{xx}(x_{t_1}^j) \to \lambda_0 p_{xx}(x_{t_1}^0) + \lambda_1 q_{xx}(x_{t_1}^0)$, то $\Phi_{t_1}^j \to \Psi_{t_1}$ при $j \to \infty$.

Таким образом, в силу лемм 3, 4, получаем, что можно перейти к пределу в системах (13) и (14):

$\psi_t^j \to \varphi_t$ в $L_F^2(t_0, t_1; R^n)$ при $j \to \infty$,

$\Phi_t^j \to \Psi_t$ в $L_F^2(t_0, t_1; R^n)$ при $j \to \infty$,

откуда следует доказательство пунктов **b)** и **c)** теоремы.

Наконец, перейдя к пределу в (16), получаем доказательство пункта **d)** теоремы. Теорема доказана.

В конце приведем пример, иллюстрирующий полученный результат.

Пример. Пусть задана следующая стохастическая управляемая система:

$$d\,x_t = (u_t + \frac{v_t^2}{2})dw_t\ ,\quad t \in [0,1]\ ,$$

$$d\,y_t = (v_t + \frac{v_{t-1/3}^2}{2})dw_t\ ,\quad t \in [0,1]\ ,$$

$$d\,z_t = v_{t-1/3}dw_t\ ,\quad t \in [0,1]\ .$$

Нужно минимизировать функционал:

$$E\int_0^1 (x_t^2 + y_t^2 + z_t^2)dt$$

на множестве допустимых управлений

$$U = \{-2 \le u_t \le -1; -2 \le v_t \le 0; t \in [0,1]\}\ ,$$

$$v_t = -2 \qquad \text{если} \qquad t \in \left[-\tfrac{1}{3}, 0\right).$$

$u_t^0 = -1$ и $v_t^0 = 0$ являются оптимальным управлением, на которых гамильтониан $\mathrm{H}(\psi_t, x_t, u_t, v_t, t)$ не достигает своего максимума. Но при этом выполняется условие d) теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаева Ч.А., Аллахвердиева Дж.Дж. Принцип максимума для стохастических систем с переменным запаздыванием // Доклады НАН Азербайджана, LIX, №5-6, 2003 , стр.61-65.
2. Allahverdieva J.J. Maximum principle for one problem of stochastic control with variable delays // Известия НАН Азербайджана, серия физ.-мат. наук, XXIV, 2004, №4, стр.15-22.
3. Аллахвердиева Дж.Дж. Принцип максимума для одной задачи стохастического оптимального управления с переменным запаздыванием по управлению //

Труды II Республиканской научной конференции “Современные проблемы информатизации, кибернетики и информационных технологий”, 2004, стр.64-66.
4. Bismut J.M. Linear quadratic optimal stochastic control with random coefficients // SIAM J. on Control, 1976, №6, pp. 419-444.
5. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев, Наука думка, 1982, 612 с.
6. Агаева Ч.А. Принцип максимума для выпуклой стохастической задачи оптимального управления с запаздыванием. // Известия АН Азербайджана, серия физ.-мат. н., 1994г, №1 –2 , стр. 42 –46.
7. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М., Мир, 1979, 399 с.

SABİT GECİKƏN İDARƏYƏ MALİK BİR STOXASTİK OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ ÜÇÜN MAKSİMUM PRİNSİPİ

Ç.A.AĞAYEVA

XÜLASƏ

Məqalədə sabit gecikən idarəyə malik və faza məhdudiyyətli stoxastik sistem üçün optimal idarəetmə məsələsinə baxılıb. Diffuziya əmsalı gecikən idarəyə malik olan halda baxılan məsələnin optimallığı üçün zəruri şərt tapılıb.

A MAXIMUM PRINCIPLE FOR ONE STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH CONSTANT DELAY ON CONTROL

Ch.A.AGAYEVA

SUMMARY

The optimal control problem for stochastic sistem with constant delay on control and with phase restriction is obtained. The necessary condition of optimality is obtained, when diffusion coefficient can contain a control variable with constant delay.